

Övning 1

1. Median, medelvärde, varians, standardavvikelse (föreläsning 3)

n – antalet observationer

i – indexerar observationerna

Median – mittersta observationen, efter att observationerna ordnats i storleksordning (medelvärdet av de två observationerna i mitten, om vi har ett jämnt antal observationer).

$$\text{Medelvärde} = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$\text{Varians} = s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

$$\text{Standardavvikelse} = s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

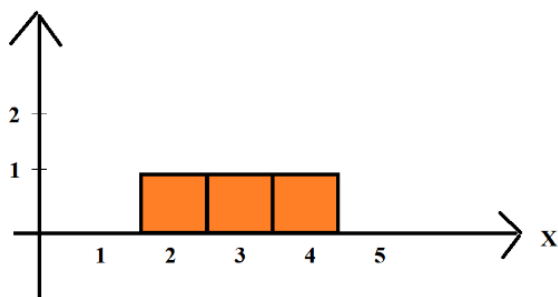
Nedan följer tre lösta exempel och sedan fem uppgifter att göra själv.

Uppgift 1.1-1.3. Ta fram median, medelvärde (\bar{x}), varians (s^2) och standardavvikelse (s) för följande talsekvenser. Rita ett histogram över varje fördelning.

1.1. Variabeln X tar följande tre värden: $\{x_1, x_2, x_3\} = \{2, 3, 4\}$

Histogram:

Antal observationer



Antal observationer = $n=3$

Median = 3

$$\text{Medelvärde} = \bar{x} = \frac{1}{3} (2 + 3 + 4) = \frac{1}{3} (9) = 3$$

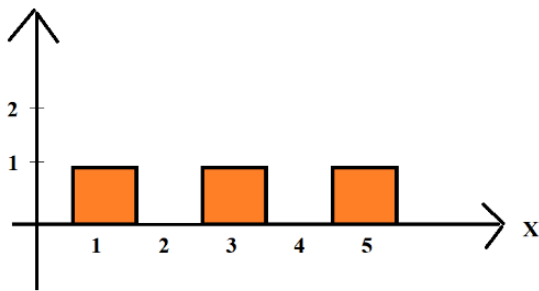
$$\text{Varians} = s^2 = \frac{1}{3-1} ((2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2) = \frac{1}{2} ((-1)^2 + (0)^2 + (1)^2) = \frac{1}{2} (1 + 0 + 1) = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{Standardavvikelse} = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1} = 1$$

1.2: Variabeln X tar följande tre värden: $\{x_1, x_2, x_3\} = \{1, 3, 5\}$

Histogram

Antal observationer



Antal observationer = $n=3$

Median = 3

$$\text{Medelvärde} = \bar{x} = \frac{1}{3}(1 + 3 + 5) = \frac{1}{3}(9) = 3$$

Varians =

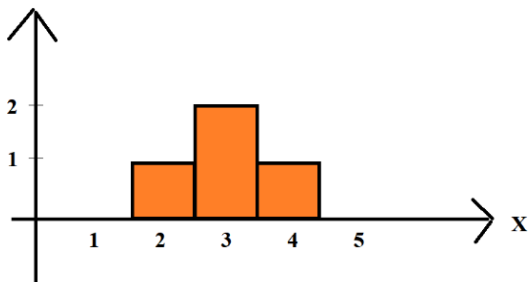
$$s^2 = \frac{1}{3-1}((1-3)^2 + (3-3)^2 + (5-3)^2) = \frac{1}{2}((-2)^2 + (0)^2 + (2)^2) = \frac{1}{2}(4 + 0 + 4) = \frac{8}{2} = 4$$

$$\text{Standardavvikelse} = s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$$

1.3: Variabeln X tar följande fyra värden: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{2, 3, 3, 4\}$

Histogram:

Antal observationer



Antal observationer = $n=4$

$$\text{Median} = \frac{1}{2}(x_2 + x_3) + \frac{1}{2}(3 + 3) = 3$$

$$\text{Medelvärde} = \bar{x} = \frac{1}{4}(2 + 3 + 3 + 4) = \frac{1}{4}(12) = 3$$

Varians =

$$s^2 = \frac{1}{4-1}((2-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2) = \frac{1}{3}((-1)^2 + (0)^2 + (0)^2 + (1)^2) = \frac{1}{3}(1 + 0 + 0 + 1) = \frac{2}{3} \approx 0.667$$

$$\text{Standardavvikelse} = s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816$$

1.1-1.3 – Analys. Titta på de tre histogrammen och jämför den beräknade spridningen för uppgifterna 1.1-1.3. Motsvarar svaren (exempelvis skillnad i standardavvikelse mellan de tre uppgifterna) vad du förväntar dig?

Ta fram median, medelvärde (\bar{x}), varians (s^2) och standardavvikelse (s) för följande talsekvenser. Rita ett histogram över varje fördelning.

1.4 Variabeln X tar följande tre värden: $\{x_1, x_2, x_3\} = \{3, 4, 5\}$

1.5 Variabeln X tar följande tre värden: $\{x_1, x_2, x_3\} = \{2, 4, 6\}$

1.6 Variabeln X tar följande tre värden: $\{x_1, x_2, x_3, x_4\} = \{3, 4, 4, 5\}$

1.7 Jämför spridningsmått du räknat fram i övningarna 1.4-1.6 med motsvarande mått i övningarna 1.1-1.3. Skiljer sig värdena åt? Varför / varför inte?

1.8 Följ föreläsning 3 och ta fram variationsbredd, kvartiler, interkvartilavstånd, typvärde, median, medelvärde (\bar{x}), varians (s^2) och standardavvikelse (s) samt rita ett histogram för följande talsekvens.

$\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\} = \{2, 1, 0, 1, 0, 1, 9, 2\}$

2. Sannolikhet (föreläsning 5, från boken SDM)

Kapitel 12.3 – några begrepp

- Sannolikheten för en händelse A, vilket skrivs som $P(A)$, är **alltid större än (eller lika med) 0 och mindre än (eller lika med) 1**. ($0 \leq P(A) \leq 1$)
Ex: Kasta en tärning, **utfallsrummet** $S = \{1,2,3,4,5,6\}$.
Om vi låter A vara händelsen "en sexa", vilket vi skriver som $A = \{6\}$, har vi $P(A) = \frac{1}{6}$ (ett tal mellan 0 och 1)
- Alla utfall som är "inte A", kallar vi **komplementet** till A, vilket vi skriver som A^C .
Ex: Kasta en tärning, låt $A = \{6\}$, vi har då $A^C = \{1,2,3,4,5\}$
- **Summan av sannolikheterna för alla möjliga utfall är 1**.
Ex: Kasta en tärning, $S = \{1,2,3,4,5,6\}$, vi har då $P(S) = 1$
Eftersom händelsen A och dess komplement A^C tillsammans utgör alla möjliga utfall har vi $P(A) + P(A^C) = 1$, vilket är en användbar räkneregel (se exemplen nedan)
- Sannolikheten att två **oberoende händelser**, säg A och B, båda äger rum är **produkten av sannolikheterna för respektive händelse**, dvs $P(A \text{ och } B) = P(A) \text{ gånger } P(B) = P(A) \times P(B)$
Ex: Kasta en tärning två gånger, låt A vara "sexa i första kastet" och B "sexa i andra kastet", vi har då
 $P(\text{sexa i första kastet OCH sexa i andra kastet}) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$
Vi multiplicerar alltså sannolikheterna med varandra (om händelserna är oberoende).
- Två händelser som inte har några gemensamma utfall kallas **disjunkta**.
Ex: Ett trafikljus är grönt, samma trafikljus är rött – båda händelserna kan inte inträffa samtidigt.

Ytterligare inledande exempel:

- Vad är sannolikheten att vi inte får en sexa på ett tärningskast? Låt $A = \{6\}$, vi har då $A^C = (\text{"inte sexa"}) = \{1,2,3,4,5\}$. Vi har $P(A) = \frac{1}{6}$, därför har vi $P(A^C) = P(\text{"inte sexa"}) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$
- Vad är sannolikheten att vi inte får två sexor på två tärningskast? Låt $A = \{(sexa \text{ på första, sexa på andra})\} = \{(6, 6)\}$, vi har då $A^C = (\text{"inte sexa på båda kasten"})$. Vi har $P(A) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$, därför har vi $P(A^C) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$
- Man kan fortsätta på samma sätt, exempelvis med fler kast och med andra händelser.

Övningsuppgifter

Övningarna 2, 5, 7, 11, 16, 23 i slutet av SDM kapitel 12.

Example 12.2, 12.3, 12.4, "Just checking" och "Step-by-step example" i SDM kapitel 12.